АГ 22.10.12

$$ab = |a||b|\cos\sphericalangle(ab)$$
$$ab = |a||b|\cos(ab)_e$$

Задача

$|a| = 4$
$|b| = 1/2$

$(ab)_e = \pi/3 \Rightarrow \cos\pi/3 = 1/2$

$ab = 4 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1$

$|a| = 3$
$|b| = 6$

$ab = 9\sqrt{2}$

$9\sqrt{2} = 3 \cdot 6 \cdot \cos(ab)_e \Leftrightarrow \frac{9\sqrt{2}}{3 \cdot 6} = \cos(ab)_e = \frac{\sqrt{2}}{2}$

или $(ab)_e = \pi/4$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$|a| = 1$, $|b| = 2$, $|c| = 3$

$(ab)_e = (bc)_e = \pi/2$, $(ca)_e = \pi/4$

$p = a + b + c$

$|p| = \sqrt{p^2} = \sqrt{(a+b+c)^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = \sqrt{1+4+9+2|ca|\cos(ca)_e} = \sqrt{14+3\sqrt{2}}$

$p = \lambda a + \sqrt{2}\, b$

$q = (ab)a - a^2 b$

$p \perp q$ за $\forall \lambda \Leftrightarrow a$ и b са колинеарни (взаимно зависими)

$pq = (\lambda a + \sqrt{2}\, b)((ab)a - a^2 b) = \lambda(ab)a^2 - \lambda a^2(ab) + \sqrt{2}(ab)^2 - \sqrt{2}\, a^2 b^2 = \sqrt{2}\,(a \times b)^2$

$pq = 0 \Leftrightarrow a \times b = \vec{0} \Leftrightarrow a$ и b са колинеарни

Да се докаже че ако един вектор е $\perp$ на три независими вектора то той е $\vec{0}$

$\vec{p} \perp \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - л.н.з $\Rightarrow p = \vec{0}$

(евклидово пространство)

$p = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \mu\vec{c}$

$|p| = \sqrt{p^2} = \sqrt{pp} = \sqrt{p(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \mu\vec{c}} = \vec{0}$

$\vec{0} \quad \vec{0} \quad \vec{0}$

$a, b, \quad p = a+b, \quad q = a-b$

$p \perp q \iff |a| = |b|$

$pq = (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$p \perp q \iff a^2 = b^2 \iff |a| = |b|$

(взаимно перпендикулярни диагонали на ромб)

$ABCD$

$\vec{AB}\vec{CD} + \vec{BC}\vec{AD} + \vec{CA}\vec{BD} = 0$

$(\vec{OB} - \vec{OA})(\vec{OD} - \vec{OC}) + (\vec{OC} - \vec{OB})(\vec{OD} - \vec{OA}) + (\vec{OA} - \vec{OC})(\vec{OD} - \vec{OB}) = 0$

Ойлер

(3-те височини в Δ)

Нека $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ са компланарни с равни дължини и поне два от тях са колинеарни. Да се докаже

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \iff (ab)e = (bc)e = (ca)e$

Нека $|a| = |b| = |c| = m$ и $p = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\left.\begin{aligned} pa &= a^2 + ba + ac = m^2(\cos(bc)e + \cos(ca)e + 1) \\ pb &= ab + b^2 + bc = m^2(\cos(ab)e + \cos(ca)e + 1) \\ pc &= ac + bc + c^2 = m^2(\cos(ab)e + \cos(bc)e + 1) \end{aligned}\right\} \text{е от квадратната} \Rightarrow$$

$\vec{0} = \cos(ab)e = \cos(bc)e = \cos(ca)e = -1/2 \Rightarrow$

$(a,b)e = (bc)e = (ac)e = \frac{2\pi}{3}$

Нека $(a,b)e = (bc)e = (ac)e = 2\pi/3 \Rightarrow$ $a\,b\,c$ [illegible] $\Rightarrow$

$\cos(ab)e = \cos(bc)e = \cos(ac)e = m$

$\exists (\lambda, \mu, \gamma) \neq (0,0,0)$ т.ка $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda a^2 + \mu ab + \gamma ac = 0 \\ \lambda ab + \mu b^2 + \gamma bc = 0 \\ \lambda ac + \mu bc + \gamma c^2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \lambda + m\mu + \gamma m = 0 \\ m\lambda + \mu + \gamma m = 0 \\ m\lambda + m\mu + \gamma = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{правилна матрица}$$

$$\left.\begin{vmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{vmatrix} = 0\right\} \Rightarrow 2m^3 - 3m^2 + 1 = 0 \text{ или}$$

$$(m-1)^2(2m+1) = 0$$

от $m \Rightarrow 1 \Rightarrow$ в противоречие с условие

от $m = -1/2 \Rightarrow \lambda = \mu = \gamma \neq 0 \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

Да се докаже че M_1, M_2, M лежат на една права и

$$n\vec{MM_1} + m\vec{MM_2} = \vec{0}$$

Нека $\vec{OM_1} = \frac{1}{n}(\vec{OA_1} + \dots \vec{OA_n})$

$\vec{OM_2} = \frac{1}{m}(\vec{OB_1} + \dots \vec{OB_m})$

$\vec{OM} = \frac{1}{n+m}(\vec{OA_1} + \dots + \vec{OA_n} + \vec{OB_1} \dots + \vec{OB_m}) =$

$\frac{1}{n+m}(n\vec{OM_1} + m\vec{OM_2}) \Rightarrow (n+m)\vec{OM} = n\vec{OM_1} + m\vec{OM_2} =$

$\Rightarrow n(\vec{OM_1} - \vec{OM}) + m(\vec{OM_2} - \vec{OM}) = \vec{0} \Rightarrow$

$n\vec{MM_1} + m\vec{MM_2} = \vec{0}$